الشعبة : نهائي رياضيات
الأستاذ : محمد علالو

الموضوع03

المدة : 04 ساعات

➢ التمرين الأول (05 نقط) :

(I) 1) ذكّر بنص مبرهنة بيزو

2) a و b عددان طبيعيان و c عدد صحيح . باستعمال مبرهنة بيزو ، برهن أنه :
إذا كان a قسما لعدد $b\times c$ و a أولي مع b فإن a قسما لعدد c

3) p و q عددان طبيعيان أوليا فيما بينهما و m عدد صحيح ، برهن أنه :
إذا كان $m\equiv 0[p]$ و $m\equiv 0[q]$ فإن $m\equiv 0[p\times q]$

(II) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ الجملة (S) التالية : $\begin{cases} n\equiv 9[17] \\ n\equiv 3[5] \end{cases} \ldots(S)$

(1 أ. تحقق من وجود ثنائية $(u;v)$ من الأعداد الصحيحة بحيث : $17u+5v=1 \quad \ldots(E)$

ب. لنضع $n_0=3\times(17u)+9\times(5v)$ ، تحقق أن n_0 حل للجملة (S)

2) برهن أن : n حل للجملة (S) يكافئ أن $(n-n_0)\equiv 0[85]$

3) باستعمال خوارزمية اقليدس عين الثنائية $(u;v)$ ، ثم استنتج حلول الجملة (S)

4) لدى مكتبي مجموعة من الكتب عددها محصور بين 300 و 400
إذا وضعها في علب ذات 17كتابا بقي لديه 9 كتب، أما إذا وضعها في علب ذات 5كتب يبقى لديه 3 كتب
عين عدد الكتب.

➢ التمرين الثاني (04 نقط) :

<u>لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة ، عينه مع التبرير:</u>

1) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $a_n=3n^2+8n+1$ و $b_n=3n+2$ نضع $d=PGCD(a_n,b_n)$
إن : أ) $d\in\{2;3\}$ ، ب) $d\in\{3;6\}$ ، جـ) $d\in\{1;3\}$

2) α عدد حقيقي موجب تماما ، قانون احتمال المتغير العشوائي X معرف بالجدول التالي:

x_i	-2	0	1	3
$p(X=x_i)$	α	$\frac{1}{20}$	α^2	$\frac{1}{5}$

الأمل الرياضياتي $E(X)$ يساوي $-\frac{3}{20}$ ، من أجل:

أ) $\alpha=\frac{3}{2}$ ، ب) $\alpha=1$ ، جـ) $\alpha=\frac{1}{2}$

3) حل المعادلة التفاضلية $y''=-2y'+4$ و الذي يحقق $y(0)=2022$ و $y'(0)=1444$ هو الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

أ) $h(x)=721e^{-2x}+2x+2743$ ، ب) $h(x)=721e^{2x}+2x+2743$ ، جـ) $h(x)=-721e^{-2x}+2x+2743$

4) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $u_n=\int_n^{n+1} xe^x\,dx$ و $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}$

إن S_n يساوي: أ) $S_n=e^n(n+1)$ ، ب) $S_n=e^n(n-1)$ ، جـ) $S_n=e^n(n-1)+1$

➢ التمرين الثالث (04 نقط) :

a عدد حقيقي موجب تماما ، (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=4$ أساسها q موجب تماما بحيث :

$$\ln(u_1)+\ln(u_2)+\ln(u_3)=6\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln a\right)$$

1) أ. عين u_2 بدلالة a

ب. استنتج قيمة q بدلالة a

جـ. كيف تصبح المتتالية (u_n) في حالة $a=3$ ؟

2) عين قيم a التي من اجلها تكون المتتالية (u_n) متقاربة

3) نفرض أن $0<a<3$: نضع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

أ. عبر عن S_n بدلالة a و n .

ب. أحسب نهاية (S_n) بدلالة a

4) نفرض أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\dfrac{12}{3-e}$

أ. بين أن $q=\dfrac{e}{3}$

ب. عين u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

جـ. نضع $T_n=\ln(u_0)+\ln(u_1)+...+\ln(u_n)$ ، أحسب T_n بدلالة n

➢ **التمرين الرابع (07 نقط) :**

(I) n عدد طبيعي . باستعمال أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$ ، برهن أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0$

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x^2+x+1)e^x$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ بحيث $\|\vec{i}\|=2cm$

1) أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، فسر النتيجة بيانيا

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم أنجز جدول تغيراتها

3) أ. عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة $x_0=\dfrac{1}{2}$

ب. أرسم المماس (T) و المنحنى (C_f)

4) عين حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد و إشارة حلول المعادلة $x^2+x+1-me^{-x}=0 \quad ...(E)$

(III) a عدد حقيقي سالب ، نعتبر العدد الحقيقي $I_{a,n}$ المعرف بـ : $I_{a,n}=\int_a^0 x^n e^x\,dx$

1) احسب بدلالة a العدد الحقيقي $I_{a,0}$ ، ثم عن طريق المكاملة بالتجزئة أحسب $I_{a,1}$ بدلالة a

2) عن طريق المكاملة بالتجزئة ، برهن أن : $I_{a,n+1}+(n+1)I_{a,n}=-a^{n+1}\times e^a$ ، ثم استنتج $I_{a,2}$

3) أحسب بـ cm^2 ، المساحة $S(a)$ ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلتها :

$x=a$ ، $x=0$ و $y=0$ ، ثم عين $\lim\limits_{a\to-\infty} S(a)$

انتهى

الشعبة : نهائي رياضيات
الأستاذ : محمد علالو

حل الموضوع 03

✓ التمرين 01:

(I) (1 تذكّير بنص مبرهنة بيزو:

يكون عددان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث : $au+bv=1$

(2 a و b عددان طبيعيان و c عدد صحيح . باستعمال مبرهنة بيزو ، نبرهن أنه :

إذا كان a قسما لعدد $b\times c$ و a أولي مع b فإن a قسما لعدد c

بما أن فرضا a و b أوليين فيما بينهما . إذن حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان u و v حيث: $au+bv=1$.

نضرب طرفي المساواة $au+bv=1$ في c ، نحصل على $cau+cbv=c$.

و بما ان فرضا a يقسم الجداء bc فإن a يقسم الجداء bcv و بما أن a يقسم الجداء ac فإن a يقسم الجداء cau و بالتالي $acu+bcv$ أي a يقسم c

(3 p و q عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما و m عدد صحيح ، نبرهن أنه :

إذا كان $m\equiv 0[p]$ و $m\equiv 0[q]$ فإن $m\equiv 0[p\times q]$

معناه نبرهن أنه إذا كان p يقسم m و q يقسم m فإن $p\times q$ يقسم m

بما أن فرضا p يقسم m و q يقسم m فإنه يوجد عددان صحيحان k و k' بحيث $m=p\times k$ و $m=q\times k'$

وعليه $p\times k=q\times k'$ و بالتالي q يقسم $p\times k$ و بما أن p و q أوليان فيما بينهما فإن حسب (2

q يقسم k إذن يوجد عدد صحيح $k"$ بحيث $k=q\times k"$ ينتج أن $m=(p\times q)\times k"$

أي أن $p\times q$ يقسم m

(II) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ الجملة (S) التالية : $...(S)$ $\begin{cases} n\equiv 9[17] \\ n\equiv 3[5] \end{cases}$

(1 أ. نتحقق من وجود ثنائية $(u;v)$ من الأعداد الصحيحة بحيث: $...(E)$ $17u+5v=1$

بما أن العدد 5 أولي لا يقسم 17 فإن 5 أولي مع 17 بالتالي حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان u و v حيث: $17u+5v=1$

ب. لنضع $n_0=3\times(17u)+9\times(5v)$ ، نتحقق أن n_0 حل للجملة (S) :

بما أن $17u+5v=1$ فإن $5v=1-17u$ و بالتالي $n_0=3\times(17u)+9\times(1-17u)$

أي أن $n_0=17\times(-6u)+9$ ومنه $n_0\equiv 9[17]$ ... (1)

كذلك بما أن $17u+5v=1$ فإن $17u=1-5v$ و بالتالي $n_0=3\times(1-5v)+9\times 5v$

أي أن $n_0=5\times(6v)+3$ ومنه $n_0\equiv 3[5]$ ... (2)

من (1) و (2) ينتج أن $\begin{cases} n_0\equiv 9[17] \\ n_0\equiv 3[5] \end{cases}$ و عليه n_0 حل للجملة (S)

(2 نبرهن أن : n حل للجملة (S) يكافئ أن $(n-n_0)\equiv 0[85]$

أ. نبرهن أنه إذا كان n حل للجملة (S) فإن $(n-n_0)\equiv 0[85]$

بما أن فرضا n حل للجملة (S) فإن $\begin{cases} n\equiv 9[17] \\ n\equiv 3[5] \end{cases}$ و بما أن n_0 حل للجملة (S) فإن $\begin{cases} n_0\equiv 9[17] \\ n_0\equiv 3[5] \end{cases}$

وعليه ; $\begin{cases} n-n_0 \equiv 0\ 17 \\ n-n_0 \equiv 0\ 5 \end{cases}$ و بما أن $85=5\times 17$ و 5 أولي مع 17 فإن حسب 3) من (I) ينتج $n-n_0 \equiv 0\ 85$

ب. نبرهن أنه إذا كان $n-n_0 \equiv 0\ 85$ فإن n حل للجملة (S):

بما أن فرضا $n-n_0 \equiv 0\ 85$ فإنه يوجد عدد صحيح k بحيث : $n-n_0=85k$ و عليه $n=85k+n_0$

أي أن $n=5\ 17k\ +n_0$ و عليه $n \equiv n_0\ 5$ و بما أن $n_0 \equiv 3\ 5$ فإن $n \equiv 3\ 5\ \ldots\ 1$

كذلك $n=17\ 5k\ +n_0$ و عليه $n \equiv n_0\ 17$ و بما أن $n_0 \equiv 9\ 17$ فإن $n \equiv 9\ 17\ \ldots\ 2$

من 1 و 2 ينتج أن n حل للجملة (S)

و بالتالي من أ و ب نجد أن n حل للجملة (S) يكافئ أن $(n-n_0) \equiv 0[85]$

3) باستعمال خوارزمية اقليدس نعين الثنائية $(u;v)$:

لدينا $17=5\ 3\ +2$ و $5=2\ 2\ +1$ و عليه $1=5-2\ 2$ و بما أن $2=17-5\ 3$

فإن $1=5-2\ 17-5\ 3$ أي أن $1=7\times\ 5\ -2\ 17$ ومنه $17\ -2\ +5\ 7\ =1$

- استنتج حلول الجملة (S) : بما أن n حل للجملة (S) يكافئ أن $(n-n_0) \equiv 0[85]$

فإنه يوجد عدد صحيح λ بحيث : $n-n_0=85\lambda$ و عليه $n=85\lambda+n_0$ و بما أن

$n_0=3\times\ 17u\ +9\times\ 5v$ و $u=-2$ و $v=7$ فإن $n_0=213$ و بالتالي $n=85\lambda+213$ مع $\lambda \in \mathbb{Z}$

4) تعيين عدد الكتب :

إذا اعتبرنا عدد الكتب هو العدد الطبيعي n فإنه إذا استعمل المكتبي علب ذات 17كتابا بقي لديه 9 كتب معناه $n \equiv 9\ 17$ و إذا استعمل علب ذات 5كتب يبقى لديه 3 كتب معناه $n \equiv 3\ 5$ومنه نتحصل على الجملة (S)

وعليه $n=85\lambda+213$ و بما أن $300 \le n \le 400$ فإن $300 \le 85\lambda+213 \le 400$ ومنه $\frac{87}{85} \le \lambda \le \frac{11}{5}$

و بالتالي $\lambda=2$ و عليه $n=383$

✓ **التمرين 01:**

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة ، عينه مع التبرير:

1) الجواب الصحيح هو جـ) ، لأن :

$d=PGCD(a_n,b_n)$ ومنه d يقسم a_n وd يقسم b_n أي أن d يقسم $3n^2+8n+1$ وd يقسم $3n+2$

ومنه d يقسم $3n^2+8n+1$ وd يقسم $n(3n+2)$ و عليه d يقسم $(3n^2+8n+1)-(3n^2+2n)$ أي أن

d يقسم $6n+1$ و بما ان d يقسم $3n+2$ فإن d يقسم $2(3n+2)$ و عليه d يقسم $(6n+4)-(6n+1)$

أي أن d يقسم 3 و بالتالي $d \in \{1;3\}$

2) الجواب الصحيح هوجـ) ، لأن :

لدينا $E(X)=(-2\times\alpha)+\left(0\times\frac{1}{20}\right)+(1\times\alpha^2)+\left(3\times\frac{1}{5}\right)$ ومنه $E(X)=\alpha^2-2\alpha+\frac{3}{5}$

وعليه $E(X)=-\frac{3}{20}$ يكافئ $\alpha^2-2\alpha+\frac{3}{5}=-\frac{3}{20}$ ، نتحصل على المعادلة $4\alpha^2-8\alpha+3=0$

حلي هذه المعادلة هما $\alpha_1=\frac{1}{2}$ و$\alpha_2=\frac{3}{2}$ ، من جهة أخرى $\alpha+\frac{1}{20}+\alpha^2+\frac{1}{5}=1$ أي أن $4\alpha^2+4\alpha-3=0$

حلي هذه المعادلة هما $\alpha_3=\frac{1}{2}$ و$\alpha_4=-\frac{3}{2}$ و عليه $\alpha=\frac{1}{2}$

3) الجواب الصحيح هو جـ) ، لأن :

بوضع $y'=z$ نجد أن $(y''=-2y'+4)$ تكافئ $(z=y'$ و $z'=-2z+4)$

المعادلة $z'=-2z+4$ هي من نمط $z'=az+b$ مع $a\in\mathbb{R}^*$ و $b\in\mathbb{R}$ و التي حلولها هي

من الشكل $z=ke^{ax}-\dfrac{b}{a}$ مع k ثابت حقيقي و بالتالي $z=ke^{-2x}+2$ ينتج أن $y'=ke^{-2x}+2$

و عليه $y=-\dfrac{1}{2}ke^{-2x}+2x+l$ مع k و l ثابتان من $\mathbb{R}$

- بما أن $y(0)=2022$ فإن $-\dfrac{1}{2}k+l=2022$ وبما أن $y'(0)=1444$ فإن $k+2=1444$

وبالتالي $k=1442$ و $l=2743$ و عليه $h(x)=-721e^{-2x}+2x+2743$

4) الجواب الصحيح هو جـ) ، لأن :

$S_n=\int_0^1 xe^x\,dx+\int_1^2 xe^x\,dx+\ldots+\int_{n-1}^n xe^x\,dx$ أي أن $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}$

و بتوظيف علاقة شال نجد أن $S_n=\int_0^n xe^x\,dx$ ، لحساب هذا التكامل نستعمل المكاملة بالتجزئة :

لنضع $u(x)=x$ و $v'(x)=e^x$ ، نجد أن $u'(x)=1$ و $v(x)=e^x$ منه $S_n=\left[xe^x\right]_0^n-\int_0^n e^x\,dx$

إذن $S_n=\left[xe^x\right]_0^n-\left[e^x\right]_0^n$ ينتج أن $S_n=ne^n-(e^n-1)$ أي أن $S_n=ne^n-e^n+1$

و عليه $S_n=e^n(n-1)+1$

✓ التمرين 03:

a عدد حقيقي موجب تماما، (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=4$ أساسها q موجب تماما بحيث:

$$\ln(u_1)+\ln(u_2)+\ln(u_3)=6\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln a\right)$$

1) أ. تعيين u_2 بدلالة a

لدينا $\ln(u_1)+\ln(u_2)+\ln(u_3)=6\left(\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)+\ln a\right)$ ومنه $\ln(u_1\times u_2\times u_3)=\ln\left(\dfrac{2a}{3}\right)^6$

ينتج أن $u_1\times u_2\times u_3=\left(\dfrac{2a}{3}\right)^6$ ، و بما أن u_1 ، u_2 و u_3 حدود متتابعة من المتتالية الهندسية (u_n)

فإن $u_1\times u_3=(u_2)^2$ وعليه $(u_2)^3=\left(\dfrac{2a}{3}\right)^6$ وبالتالي $u_2=\left(\dfrac{2a}{3}\right)^2$ أي أن $u_2=\dfrac{4a^2}{9}$

ب. استنتاج قيمة q بدلالة a :

بما أن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=4$ أساسها q فإن $u_2=u_0\times q^2$ ومنه $\dfrac{4a^2}{9}=4\times q^2$

و عليه $q^2=\dfrac{a^2}{9}$ و بما أن $q>0$ فإن $q=\dfrac{a}{3}$

جـ. في حالة $a=3$ نجد $q=1$ ، عندئذ تصبح المتتالية (u_n) ثابتة

!

2) تعيين قيم a التي من اجلها تكون المتتالية (u_n) متقاربة :

(u_n) متقاربة إذا وفقط إذا كان $q \in]-1;0[\cup]0;1]$ وبما أن $q=\frac{a}{3}$ و $a>0$

فإن (u_n) متقاربة إذا وفقط إذا كان $\frac{a}{3} \in]0;1]$ أي أن $0<\frac{a}{3}\leq 1$ ومنه $0<a\leq 3$

3) نفرض أن $0<a<3$: نضع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

أ. التعبير عن S_n بدلالة a و n :

إن $S_n=\frac{u_0}{1-q}\left(1-q^{n+1}\right)$ ومنه $S_n=\frac{4}{1-\frac{a}{3}}\left(1-\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}\right)$ أي أن $S_n=\frac{12}{3-a}\left(1-\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}\right)$

ب. حساب نهاية (S_n) بدلالة a :

بما أن $0<a<3$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{12}{3-a}$

4) نفرض أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{12}{3-e}$

أ. نبين أن $q=\frac{e}{3}$:

بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{12}{3-a}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{12}{3-e}$ فإن $\frac{12}{3-e}=\frac{12}{3-a}$ وعليه $a=e$

ب. تعيين u_n بدلالة n ، ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

* من اجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n=4\left(\frac{e}{3}\right)^n$

* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ ، لأن $0<\frac{e}{3}<1$

جـ. نضع $T_n=\ln(u_0)+\ln(u_1)+...+\ln(u_n)$:

- حساب T_n بدلالة n : لدينا $T_n=\ln(u_0\times u_1\times...\times u_n)$ و بما أن من اجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n=4\left(\frac{e}{3}\right)^n$

فإن $T_n=\ln\left(4\left(\frac{e}{3}\right)^0\times 4\left(\frac{e}{3}\right)\times...\times 4\left(\frac{e}{3}\right)^n\right)$ ومنه $T_n=\ln\left(4^{n+1}\left(\frac{e}{3}\right)^{0+1+2+...+n}\right)$

و عليه $T_n=\ln\left(4^{n+1}\left(\frac{e}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$ أي أن $T_n=\ln\left(4^{n+1}\right)+\ln\left(\left(\frac{e}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$

و بالتالي $T_n=(n+1)\ln(4)+\frac{n(n+1)}{2}\ln\left(\frac{e}{3}\right)$

✓ التمرين 04:

(I) البرهان أن $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=0$: ليكن n عدد طبيعي

لنضع $x=-u$ نجد لما $x\to-\infty$ فإن $u\to+\infty$ ولدينا :

$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim_{u\to+\infty} (-u)^n e^{-u} = \lim_{u\to+\infty} (-1)^n \times \frac{u^n}{e^u}$ ومنه $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \lim_{u\to+\infty} (-1)^n \times \frac{1}{\left(\frac{e^u}{u^n}\right)} = 0$ ، لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^u}{u^n} = +\infty$

(II) (1 أ. حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، لأن $\lim_{x\to+\infty} (x^2+x+1) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

ب. حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و تفسيرها بيانيا : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2e^x + xe^x + e^x) = 0$ ، لأن $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ مع $n \in \mathbb{N}$

* **التفسير البياني:** المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 0$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة ،ثم انجاز جدول تغيراتها :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق عليه هما $u_1 : x \mapsto x^2+x+1$ و $u_2 : x \mapsto e^x$

ومن أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f'(x) = (2x+1)e^x + (x^2+x+1)e^x$ أي أن $f'(x) = (x^2+3x+2)e^x$

بما أن من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $e^x > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة x^2+3x+2

نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$ وعليه إشارة $f'(x)$ تعطى على النحو التالي:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-2]$ ، $[-1;+\infty[$ و متناقصة تماما على $[-2;-1]$

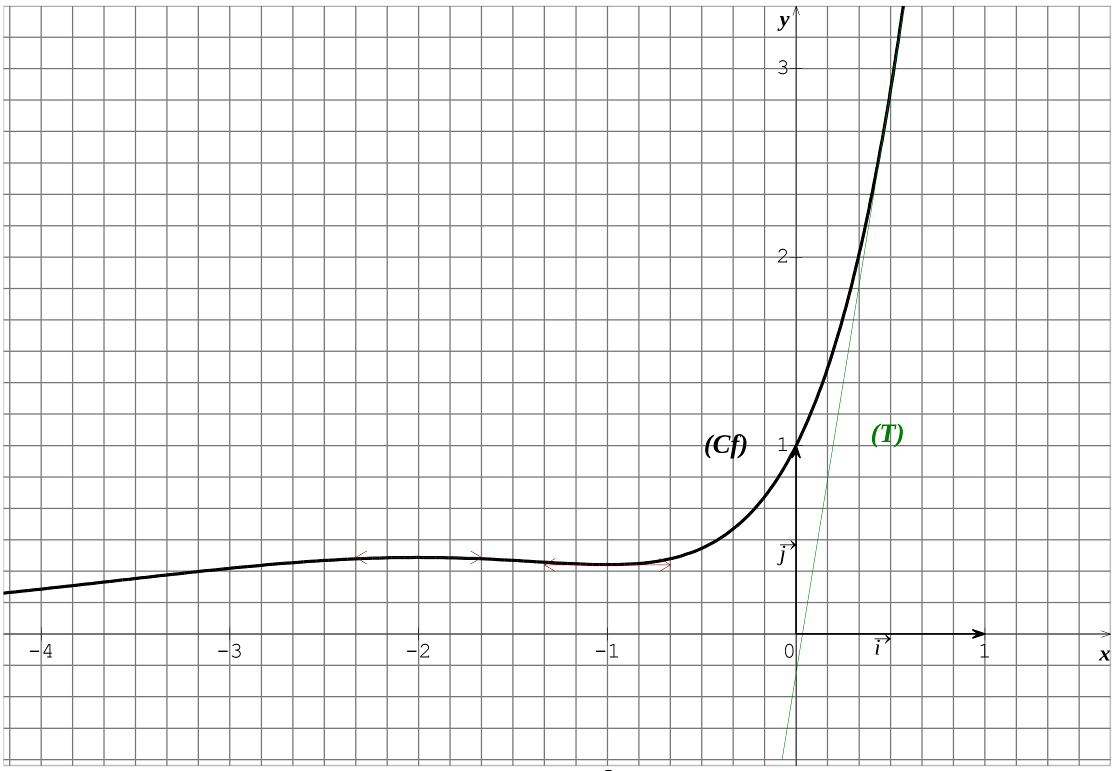
جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$3e^{-2}$	$\searrow$	e^{-1}	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ .تعيين معادلة للمماس (T) : $(T) : y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$ و بما أن $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}\sqrt{e}$ و $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4}\sqrt{e}$

نجد أن المعادلة $y = \frac{15}{4}\sqrt{e}\,x - \frac{1}{8}\sqrt{e}$ هي معادلة للمماس (T)

ب. رسم المماس (T)و المنحني (C_f) :



1) لدينا (E) تكافئ $x^2+x+1=me^{-x}$ ومنه (E) تكافئ $(x^2+x+1)e^x=m$ أي أن $f(x)=m$

و بالتالي بيانيا حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) و المستقيم المعرف بالمعادلة $y=m$

وعليه : لما $m\leq 0$: المعادلة (E) لا تقبل حلول

لما $0<m<e^{-1}$ أو $3e^{-2}<m<1$: للمعادلة حل وحيد سالب

لما $m=e^{-1}$ أو $m=3e^{-2}$: للمعادلة حلين سالبين ، أحدهما مضاعف

لما $e^{-1}<m<3e^{-2}$: للمعادلة ثلاثة حلول سالبة

لما $m=1$: للمعادلة حل وحيد معدوم

لما $m>1$: للمعادلة حل وحيد موجب

(III) 1) حساب $I_{a,0}$: لدينا $I_{a,0}=\int_a^0 e^x\,dx$ ومنه $I_{a,0}=\left[e^x\right]_a^0$ ينتج أن $I_{a,0}=1-e^a$

- تعين عن طريق المكاملة بالتجزئة $I_{a,1}$: لدينا $I_{a,1}=\int_a^0 xe^x\,dx$

بوضع : $u(x)=x$ نجد $u'(x)=1$ و $v'(x)=e^x$ نجد $v(x)=e^x$ و عليه:

$I_{a,1}=\left[xe^x\right]_a^0-\int_a^0 e^x\,dx$ ومنه $I_{a,1}=\left[xe^x\right]_a^0-\left[e^x\right]_a^0=\left[(x-1)e^x\right]_a^0$ ينتج أن $I_{a,1}=-1-(a-1)e^a$

2) لنبرهن عن طريق المكاملة بالتجزئة أن $I_{a,n+1}+I_{a,n}=-a^{n+1}\times e^a$:

لدينا $I_{a,n+1}=\int_a^0 x^{n+1}e^x\,dx$ ، بوضع : $u(x)=x^{n+1}$ نجد $u'(x)=(n+1)x^n$ و $v'(x)=e^x$ نجد $v(x)=e^x$

و عليه: $I_{a,n+1}=\left[x^{n+1}e^x\right]_a^0-\int_a^0(n+1)x^ne^x\,dx$ ومنه $I_{a,n+1}=-a^{n+1}e^a-(n+1)\int_a^0 x^ne^x\,dx$

ينتج أن $I_{a,n+1}=-a^{n+1}e^a-(n+1)I_{a,n}$ وعليه $I_{a,n+1}+(n+1)I_{a,n}=-a^{n+1}e^a$

- استنتاج $I_{a,2}$: من أجل $n=2$ نجد $I_{a,2}+2I_{a,1}=-a^2e^a$ ومنه $I_{a,2}=-a^2e^a-2\left(-1-(a-1)e^a\right)$

ومنه $I_{a,2}=2-\left(a^2-2a+2\right)e^a$

1) حساب $S(a)$: لدينا $S(a)=\left(\int_a^0 f(x)dx\right)\times 4cm^2$

إن $\int_a^0 f(x)dx=\int_a^0\left(x^2+x+1\right)e^x\,dx$ ومنه $\int_a^0 f(x)dx=\int_a^0 x^2e^x\,dx+\int_a^0 xe^x\,dx+\int_a^0 e^x\,dx$

إذن $\int_a^0 f(x)dx=I_{a,2}+I_{a,1}+I_{a,0}$ أي أن $\int_a^0 f(x)dx=2-\left(a^2-2a+2\right)e^a-1-(a-1)e^a+1-e^a$

ومنه $\int_a^0 f(x)dx=2-\left(a^2-3a+2\right)e^a$ و بالتالي $S(a)=\left(8-\left(4a^2-12a+8\right)e^a\right)cm^2$

- حساب $\lim\limits_{a\to-\infty}S(a)$: $\lim\limits_{a\to-\infty}S(a)=8cm^2$ ، لأن :

$\lim\limits_{a\to-\infty}\left(4a^2-12a+8\right)e^a=\lim\limits_{a\to-\infty}\left(4a^2e^a-12ae^a+8e^a\right)=0$ ؛ لأن $\lim\limits_{a\to-\infty}a^ne^a=0$ مع $n\in\mathbb{N}$

انتهى